Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 2

Mardi 1 novembre 2022 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

8822 – 7117

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

Le tableau suivant montre les résultats au test de mathématiques (x) et les résultats au test de sciences (y) pour un groupe de huit élèves.

Résultats en mathématiques (x)	64	68	72	75	80	82	85	86
Résultats en sciences (y)	67	72	77	76	84	83	89	91

La droite de régression pour y en fonction de x pour ces données peut s'écrire sous la forme $y = ax + b$.

(a) Trouvez la valeur de a et la valeur de b. [2]

(b) Écrivez la valeur du coefficient de corrélation de Pearson, r. [1]

(c) Utilisez l'équation de votre droite de régression pour prédire le résultat au test de sciences d'un élève ayant eu un résultat de 78 au test de mathématiques. Donnez votre réponse à l'entier le plus près. [2]

....

....

....

....

....

....

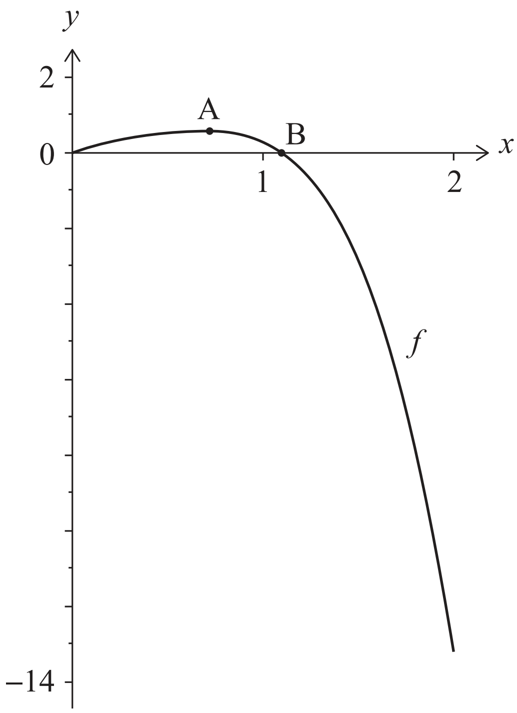
....

....

....

2. [Note maximale : 6]

La fonction f est définie par $f(x) = \ln(xe^x + 1) - x^4$, pour $0 \le x \le 2$. La représentation graphique de f est montrée dans le diagramme suivant.



La représentation graphique de f a un maximum relatif au point A. La représentation graphique coupe l'axe des abscisses à l'origine et au point B.

(a) Trouvez les coordonnées de A. [2]

(b) Trouvez l'abscisse de B. [1]

(c) Trouvez l'aire totale délimitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et la droite $x = 2$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Note maximale : 5]

Une suite géométrique a comme premier terme 50 et comme quatrième terme $86{,}4$.

La somme des n premiers termes de la suite est S_n.

Trouvez la plus petite valeur de n telle que $S_n > 33\,500$.

4. [Note maximale : 7]

La population d’une ville t années après le 1er janvier 2014 peut être modélisée par la fonction

$$P(t) = 15\,000\mathrm{e}^{kt}, \text{ où } k < 0 \text{ et } t \geq 0.$$

On sait qu’entre le 1er janvier 2014 et le 1er janvier 2022, la population a diminué de $11\,\%$.

Utilisez ce modèle pour estimer la population de cette ville au 1er janvier 2041.

5. [Note maximale : 6]

Considérez le développement de $\frac{(ax+1)^9}{21x^2}$, où $a \neq 0$. Le coefficient du terme en x^4 est $\frac{8}{7}a^5$.

Trouvez la valeur de a.

6. [Note maximale : 8]

La fonction de densité de la variable aléatoire continue X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} axe^x, & 0 \le x \le b \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}^+$.

(a) Trouvez une expression pour a en fonction de b. [5]

(b) Dans le cas où $a = b = 1$, trouvez la médiane de X. [3]

. . . .

7. [Note maximale : 6]

Considérez les vecteurs $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{v} = \left(\cos\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(\sin\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{j}$, où $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

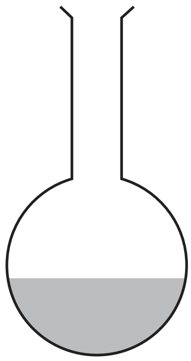
Soit θ l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

(a) Trouvez une expression pour $\cos\theta$ en fonction de n. [3]

(b) Trouvez la valeur exacte de la limite de laquelle s'approche θ lorsque $n \to \infty$. [3]

8. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un liquide à l’intérieur d’un flacon en verre à fond arrondi (un ballon), composé d’une sphère et d’un col cylindrique.



Initialement, le flacon est vide. Le liquide est versé dans le flacon à un taux de $2\,\mathrm{cm^3 s^{-1}}$. Vous pouvez supposer que le liquide n’atteint pas le col cylindrique.

Le volume $V\,\mathrm{cm^3}$ et la hauteur $h\,\mathrm{cm}$ du liquide dans le flacon satisfont l’équation $V = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

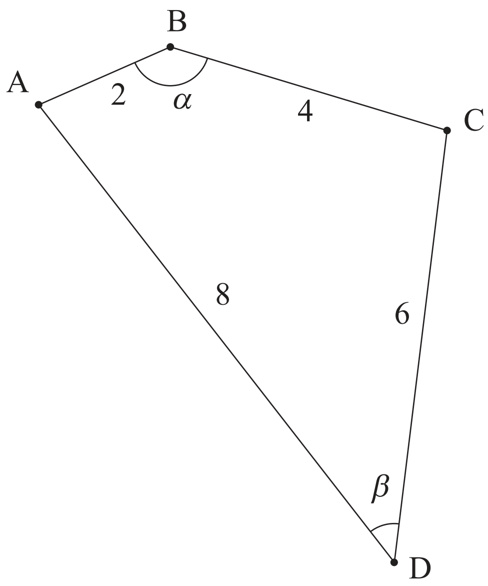
Trouvez le taux de variation de la hauteur du liquide dans le flacon à l’instant où le volume du liquide est de $200\,\mathrm{cm^3}$.

Tournez la page

9. [Note maximale : 8]

Considérez un quadrilatère ABCD où $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{BC}=4$, $\mathrm{CD}=6$ et $\mathrm{DA}=8$, tel que montré dans le diagramme suivant. Soit $\alpha=\mathrm{A\hat{B}C}$ et $\beta=\mathrm{A\hat{D}C}$.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) (i) Trouvez AC en fonction de α.

(ii) Trouvez AC en fonction de β.

(iii) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez une expression pour α en fonction de β. [4]

(b) Trouvez l'aire maximale du quadrilatère ABCD. [4]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 16]

Le temps travaillé, T, en heures par semaine, par les employés d'une grande entreprise est normalement distribué avec une moyenne de 42 et un écart type de $10{,}7$.

(a) Trouvez la probabilité qu'un employé choisi au hasard travaille plus de 40 heures par semaine. [2]

(b) Un groupe de quatre employés est choisi au hasard. On demande à chaque employé, l'un après l'autre, s'il travaille plus de 40 heures par semaine. Trouvez la probabilité que le quatrième employé soit le seul du groupe qui travaille plus de 40 heures par semaine. [3]

(c) Un grand groupe d'employés travaille plus de 40 heures par semaine.

(i) Un employé est choisi au hasard dans ce grand groupe.

Trouvez la probabilité que cet employé travaille moins de 55 heures par semaine.

(ii) Dix employés sont choisis au hasard dans ce grand groupe.

Trouvez la probabilité qu'exactement cinq d'entre eux travaillent moins de 55 heures par semaine. [7]

On sait que $\mathrm{P}(a \le T \le b) = 0{,}904$ et que $\mathrm{P}(T > b) = 2\mathrm{P}(T < a)$, où a et b représentent des nombres d'heures travaillées par semaine. Un employé qui travaille moins de a heures par semaine est considéré comme un employé à temps partiel.

(d) Trouvez le temps maximal, en heures par semaine, qu'un employé peut travailler tout en étant encore considéré comme un employé à temps partiel. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 15]

La fonction f est définie par $f(x) = e^{2x}(3x - 4)$, où $x \in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez $f'(x)$. [3]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez les coordonnées du point sur la représentation graphique de $y = f(x)$ où la tangente est parallèle à la droite $y = x$. [3]

La région délimitée par la courbe $y = f(x)$, l’axe des abscisses et l’axe des ordonnées subit une rotation de 2π radians autour de l’axe des abscisses pour former un solide de révolution.

(c) Trouvez le volume de ce solide. [4]

Considérez une fonction g, telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

(d) Trouvez la valeur de

(i) $(f \circ g)(0)$;

(ii) $(f \circ g)'(0)$. [5]

12. [Note maximale : 22]

Considérez les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;3)$, $\mathrm{B}(k\,;-2\,;1)$ et $\mathrm{C}(5\,;0\,;2)$, où $k \in \mathbb{R}$.

(a) Écrivez $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. [2]

(b) Étant donné que les points A, B et C sont situés sur une droite, montrez que $k = 9$. [1]

(c) Pour $k = 9$, soit L_1 la droite passant par A, B et C.

(i) Trouvez une équation vectorielle de la droite L_1.

(ii) L’équation de la droite L_2 est $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1 - z$. Montrez que les droites L_1 et L_2 sont gauches. [10]

(d) Pour $k \neq 9$, soit Π le plan contenant A, B et C.

(i) Trouvez l’équation cartésienne du plan Π.

(ii) Trouvez les coordonnées du point situé sur le plan Π qui est le plus près de l’origine $(0\,;0\,;0)$. [9]

Références :